Lycée Jean Mermoz

DEVOIR COMMUN N°1
DE
MATHÉMATIQUES

SERIE S

OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Samedi 16 janvier 2016

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.
Les annexes sont à rendre avec la copie.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

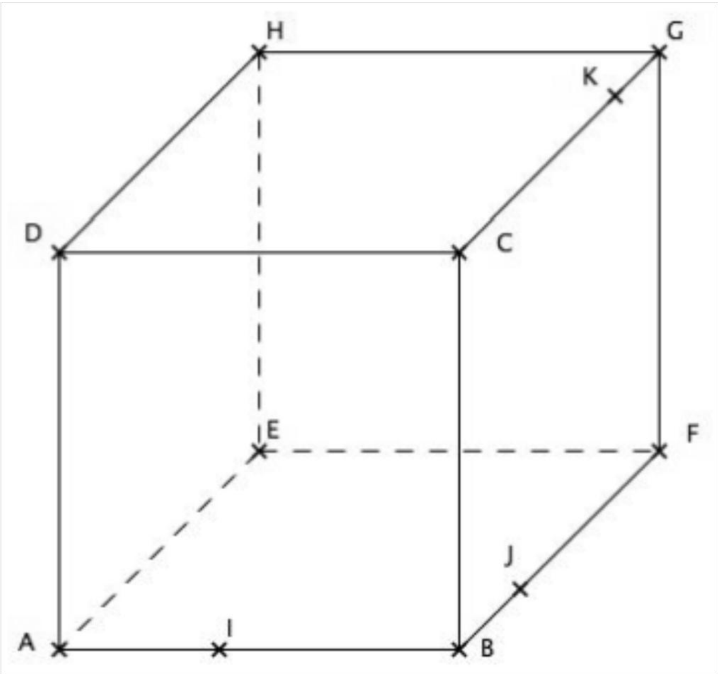
Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

<u>Exercice 1</u>: (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse ***en justifiant****.*
Pour les propositions 2,3,4,5, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé.

Proposition 1 : La section du cube ABCDEFGH ci-dessous par le plan (IJK) est un hexagone.



On justifiera en utilisant le cube en **annexe 1** pour représenter la section.

Proposition 2 : On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = \overline{z_A}$, et $z_c = -(z_A + z_B)$. Le triangle ABC est équilatéral.

Proposition 3 : Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$ sont les affixes de trois points alignés .

Aide : on pourra d'abord montrer que $z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = (z-i)(z^2 - 2z + 2)$

Proposition 4: Soit $Z = z\bar{z} + 2z + i\bar{z} + \frac{1}{4} + 5i$ où z désigne un nombre complexe.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que Z est un nombre réel est une droite.

Proposition 5 : L'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$\left|\frac{z+1-i}{\bar{z}-i}\right| = 1$$

est un cercle privé d'un point.

Exercice 2 : (5 points)

On arrondira les résultats à 10^{-3} *si nécessaire.*

Au lycée Jacques MORMEZ, le service de reprographie tourne à plein régime. Le lycée fait appel à la société Printspeed pour la maintenance des photocopieuses .
Le lycée décide de faire le point sur la rapidité et la qualité des interventions de cette société.

Les parties A et B sont largement indépendantes.

Partie A : Rapidité d'intervention

Dès qu'une photocopieuse tombe en panne, le responsable du service de reprographie du lycée appelle la société Printspeed. Quatre fois sur dix, il tombe sur le répondeur de la société, les autres fois sur un opérateur.

Il a constaté que :

- Lorsqu'il tombe sur le répondeur, le temps d'intervention d'un technicien de Printspeed dépasse trois heures dans 90% des cas.
- Lorsqu'il tombe sur un opérateur, le temps d'intervention d'un technicien de Printspeed est inférieur à trois heures dans 70% des cas.

On considère les évènements suivants :

- R : " Le responsable du service de reprographie tombe sur le répondeur de Printspeed "
- T : " Le temps d'intervention du technicien de Printspeed est inférieur à trois heures"

On pourra s'aider d'un arbre pondéré de probabilités.

1) Démontrer que la probabilité de l'évènement T est égale à 0,46.

2) Le responsable du service de reprographie a appelé Printspeed pour un dépannage et un technicien est arrivé en moins de trois heures pour l'effectuer. Quelle est la probabilité qu'il soit tombé sur un opérateur lors de son appel ?

3) Au cours du premier trimestre, la société Printspeed a été appelée 7 fois pour maintenance, les appels s'effectuant de manière identiques et indépendantes.
Calculer la probabilité que le temps d'intervention d'un technicien de Printspeed ait été inférieur à trois heures au moins deux fois au cours du trimestre.

Partie B : Qualité des interventions

Le responsable du service de reprographie tient à jour ses statistiques. Il a constaté que :

- Si un technicien de Printspeed intervient la semaine n, alors la probabilité qu'il intervienne la semaine $n+1$ est 0,75.
- Si aucun technicien n'intervient la semaine n, alors la probabilité qu'un technicien de Printspeed interviennent la semaine $n+1$ est 0,1.

On note A_n l'évènement : " Un technicien de Printspeed intervient la semaine n" et p_n la probabilité de A_n.
On considère que $p_1 = 1$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré de probabilités.

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_{n+1} = \frac{13}{20}p_n + \frac{1}{10}$$

2) Démontrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = p_n - \frac{2}{7}$$

est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Au bout de combien de semaines la probabilité que le technicien intervienne deviendra inférieure ou égale à 0,5 ?

<u>Exercice 3</u> : (5 points)

PARTIE A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + x + 1$

1) Étudier le sens de variation de g.

2) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

3) Dresser le tableau de variation de g.

4) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

5) Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$$

et (C_f) sa courbe représentative donnée **en annexe 2**.

1) Montrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

2) Étudier les variations de f.

3) Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$, et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$. On placera sur le graphique en annexe le point A de coordonnées $(\alpha\,; f(\alpha))$.

4) Déterminer les limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$, en déduire les éventuelles asymptotes à (C_f). Dresser le tableau de variation de f.

5) On appelle T la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0. Déterminer l'équation de T et tracer T sur le graphique en annexe.

Exercice 4 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n

1. Étude des propriétés de la fonction *f*.

a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.
On note α la solution.

c. Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$.
De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha , +\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$.

2. Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}$$

a. Sur le graphique représenté dans l'**annexe 3** , sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0 ; 0)$ et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3, A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

b. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Étude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0.

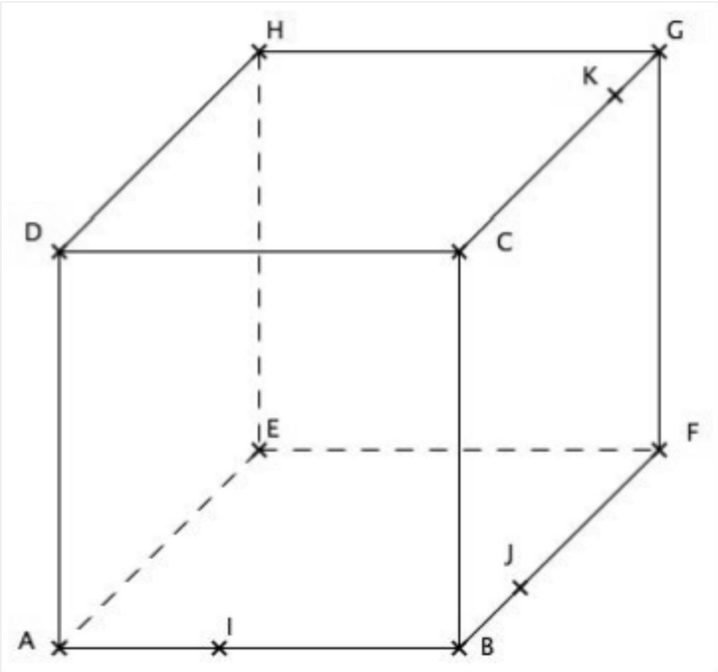
Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?

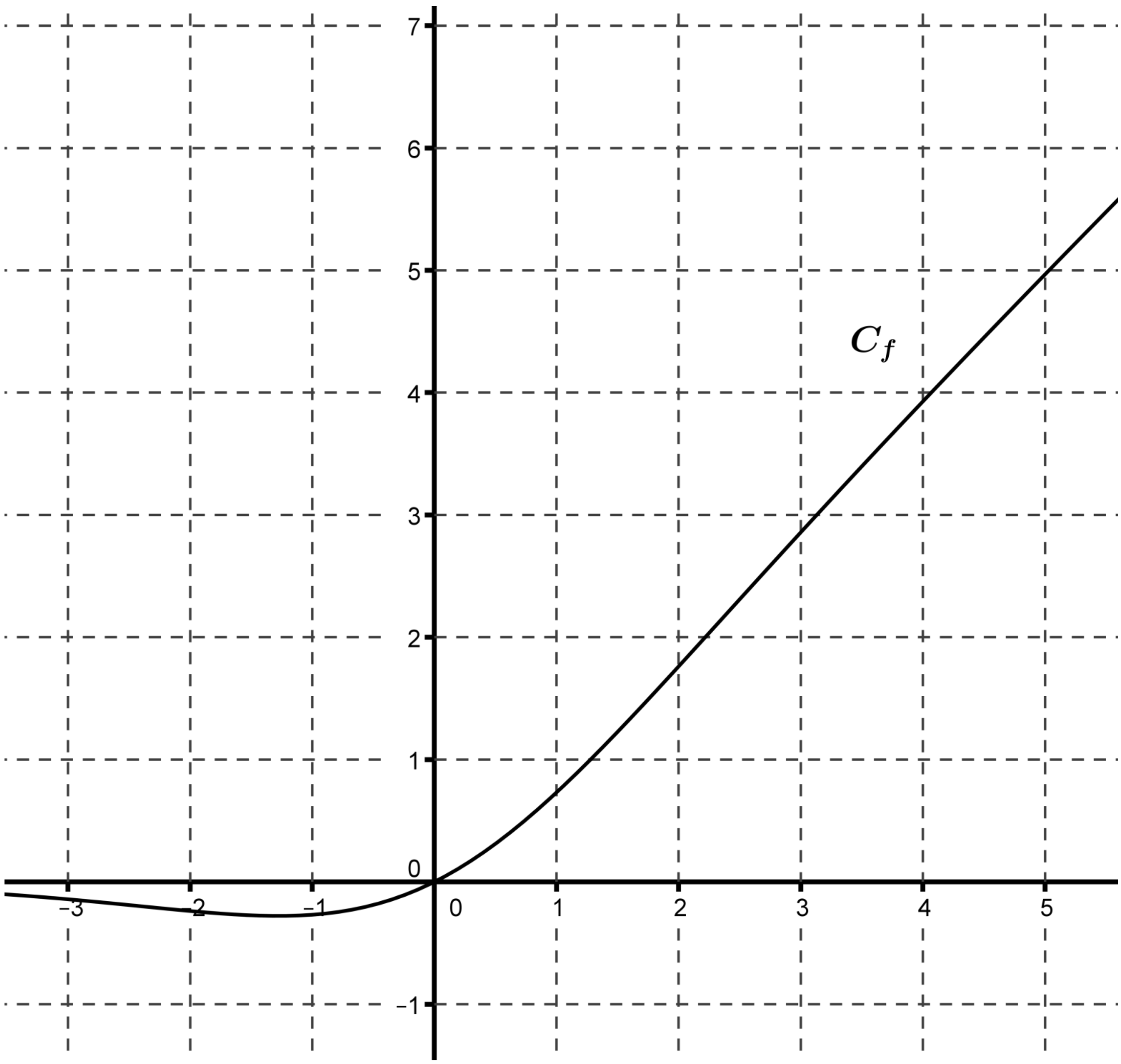
Annexes à rendre avec la copie

Nom et prénom : ....

<u>Annexe 1</u> : exercice 1



<u>Annexe 2</u> : exercice 3



Nom et Prénom : ....

<u>Annexe 3</u> : exercice 4